ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Тихоокеанский государственный университет

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Методические указания к контрольным работам

Хабаровск
Издательство ТОГУ
2008

УДК 389
Основы метрологии: Методические указания к контрольным работам / Сост. Ю.Р.Чашкин, А.В.Щекин. — Хабаровск: Изд–во Тихоокеанского гос. ун–та, 2008. — 36 с.

Методические указания включают работу, в которой приведены основные сведения, указан порядок выполнения и методика обработки результатов измерений, а также требования к оформлению отчета.

Методические указания предусматривают закрепление теоретических знаний и приобретение практических навыков по статистической обработке результатов измерений, содержащих случайные ошибки (при отсутствии или наличии ошибок систематических), в том числе навыков использования статистических таблиц и критериев.

Методические указания могут быть рекомендованы для обработки результатов измерений при выполнении студенческих научно–исследовательских работ.

Печатается в соответствии с решениями кафедры литейного производства и технологии металлов и методического совета института информационных технологий.

ОБРАБОТКА МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить основные приемы статистической обработки результатов многократных измерений:

- построение вариационного ряда, гистограммы частот (частостей);
- нахождение среднего арифметического, медианы, моды; проверка гипотезы о виде закона распределения по виду гистограммы и проверка на промахи;
- вычисление оценки СКО измерений и оценки СКО среднего арифметического;
- построение доверительного интервала для неизвестного истинного значения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При многократных измерениях (число измерений $n \geq 4$) физической величины (ФВ) постоянного размера за результат измерений обычно принимается среднее арифметическое (СА):

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}. \qquad (1)$$

Иногда, вместо СА, используют медиану при нечетном числе измерений:

$$\overline{X}_{Me} = X_{\frac{n+1}{2}}, \qquad (2)$$

а при четном пользуются формулой

$$\overline{X}_{Me} = \left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)/2, \qquad (2.1)$$

причем предварительно результаты измерений X_i располагают в неубывающем порядке (такой ряд измерений называется вариационным) $X_1 \le X_2 \le .... \le X_n$.

Реже используется мода $\overline{X}_{Mo}$ как значение, соответствующее максимуму гистограммы.

Все эти оценки определяются по выборке и выражаются одним числом, то есть точкой на числовой оси, и называются точечными выборочными оценками.

Важными свойствами точечных оценок являются следующие:

- Несмещенность; оценка (например $\overline{X}$) параметра ($X_{ист}$) называется несмещенной, если ее математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром ($X_{ист}$).
- Состоятельность; оценка называется состоятельной, если с увеличением объема выборки n (числа измерений) вероятность того, что оценка сходится к истинному значению, возрастает и стремится к единице при объеме выборки, стремящемся к бесконечности.
- Эффективность; оценка называется эффективной, если она обладает минимальной дисперсией по сравнению с другими оценками.

Чаще всего используется среднее арифметическое. Оно обладает весьма важными преимуществами перед другими оценками:

1) при любом законе распределения ошибок (с конечными математическим ожиданием и дисперсией) СА является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания (истинного значения).

2) дисперсия СА в n раз меньше дисперсии отдельных результатов измерений, то есть дисперсии ошибок;

3) в случае нормального распределения ошибок измерений СА является эффективной оценкой математического ожидания;

4) в случае нормального распределения ошибок измерений СА распределено нормально, а при других распределениях ошибок — асимптотически нормально, то есть быстро сходится к нормальному с ростом числа измерений (увеличением объема выборки).

Найденное по выборке случайных величин $\overline{X}$ является случайной величиной. Разность между ним и неизвестным истинным значением $\Delta = \overline{X} - X_{ист}$, называемая в метрологии погрешностью, остается неизвестной (эта разность также случайная величина, ее правильнее называть ошибкой среднего арифметического). Если бы дисперсия σ_X^2 случайной величины X была известна, то дисперсия $\sigma_{\overline{X}}^2$ СА, вычисленного по выборке объема n, была бы тоже известна: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$. В этом случае можно было бы построить доверительный интервал для $X_{ист}$:

$$\overline{X} - U_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}} \le X_{ист} \le \overline{X} + U_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}},$$

где $\sigma_{\overline{X}}$ — СКО среднего арифметического; $U_{\alpha/2}$ — квантиль (критическое значение) нормального нормированного распределения, соответствующая двухстороннему уровню значимости α (или доверительной вероятности $P_д = 1 - \alpha$).

В приложении даны таблицы интегральной и дифференциальной функций нормированного нормального распределения (табл. 1 и 2).

При неизвестной дисперсии σ_X^2 (и неизвестном истинном значении $X_{ист}$) ее точечной несмещенной и состоятельной, а при нормальном распределении ошибок и эффективной оценкой является выборочная оценка дисперсии

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}. \quad (3)$$

Обычно пользуются корнем квадратным из выражения (3) для вычисления оценки СКО по выборке:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}, \quad (4)$$

хотя это выражение не вполне строго и S_X по (4) в качестве оценки СКО является смещенной. Более точное, хотя и тоже приближенное выражение для оценки СКО имеет вид

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1{,}5}}\,. \qquad (5)$$

Для оценки СКО среднего арифметического $S_{\overline{X}}$ получаем из (4)

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}\,. \qquad (6)$$

Для построения доверительного интервала для $X_{ист}$ воспользуемся соотношением, называемым дробью Стьюдента, которое имеет t–распределение.

$$\frac{\overline{X} - X_{ист}}{S_{\overline{X}}} = t\,.$$

Пользуясь таблицами t–распределения (табл. 3 прил.) можем построить доверительный интервал для истинного значения $X_{ист}$

$$\overline{X} - t_{\alpha/2,\nu} S_{\overline{X}} \le X_{ист} \le \overline{X} + t_{\alpha/2,\nu} S_{\overline{X}}\,, \qquad (7)$$

где $t_{\alpha/2,\nu}$ — квантили t–распределения при уровне значимости $\alpha/2$, то есть доверительной вероятности $P_д = 1-\alpha$, и числе степеней свободы (числе независимых слагаемых в (4) и (6)) $\nu = n-1$.

Интервал $t_{\alpha/2,\nu} S_{\overline{X}}$ в метрологии называется доверительной случайной погрешностью.

Доверительным интервалом по выражению (7) в метрологии пользуются, когда ошибки измерений имеют нормальное распределение. В данной работе предлагается визуально по гистограмме проверить гипотезу о нормальности распределения.

Если установить вид распределения не удается, что бывает при малом объеме выборки, погрешность результата измерения можно оценить с помощью неравенства Чебышева:

$$P_{\partial}\left\{\left|X_{ист}-\overline{X}\right|<\varepsilon\right\}\geq\frac{\sigma_{\overline{X}}^2}{\varepsilon^2}. \qquad (8)$$

Задаваясь значением P_{∂} и приравнивая его к правой части (8), находим соответствующее значение ε.

Например, пусть $P_{\partial}=0{,}90$. Тогда

$$P_{\partial}\left\{\left|X_{ист}-\overline{X}\right|<\varepsilon\right\}=0{,}90=1-\frac{\sigma_{\overline{X}}^2}{\varepsilon^2};$$

$$\varepsilon=3{,}2\sigma_{\overline{X}},$$

то есть интервал $\overline{X}\pm3{,}2\sigma_{\overline{X}}$ с вероятностью, большей или равной 0,90, накрывает неизвестное истинное значение.

Поскольку $\sigma_{\overline{X}}$ обычно неизвестно, вместо него используют выборочную оценку $S_{\overline{X}}$. При этом, однако, нельзя утверждать, что интервал $\overline{X}\pm3{,}2S_{\overline{X}}$ накроет неизвестное истинное значение с вероятностью, большей или равной заданной, так как $S_{\overline{X}}$ является случайной величиной и может быть больше $\sigma_{\overline{X}}$ (тогда вероятность накрытия $X_{ист}$ будет больше заданной) или меньше (тогда вероятность будет меньше). Можно лишь надеяться, что вероятность накрытия не слишком отличается от заданной. Строго говоря, это же замечание относится и к доверительному интервалу (7), если он определен по единственной выборке, как это обычно имеет место в метрологии.

Среднее арифметическое весьма чувствительно к промахам (грубым ошибкам), то есть не является робастной (устойчивой) оценкой, такой результат подлежит исключению. Прежде всего таковыми могут оказаться $X_{\min}$ или $X_{\max}$. При нормальном распределении случайных ошибок измерений вопрос об исключении отдельного результата решается с помощью статистических критериев. Вычислив предварительные оценки $\overline{X}$ и S_X, можно проверить $X_{\min}$ и $X_{\max}$ по статистике для резко выделяющихся наблюдений:

$$\nu = \frac{X_{\max} - \overline{X}}{S_X}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad (9)$$

или

$$\nu = \frac{\overline{X} - X_{\min}}{S_X}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,. \qquad (10)$$

Вычисленные по формуле (9 или 10) значения статистики ν следует сравнить с критическим (предельным для данной статистики) значением, приведенным в табл. 4 приложения (для уровня значимости α=0,05). Если вычисленное значение ν превышает $\nu_{кр}$, результат признается промахом и должен быть отброшен. После исключения промаха вычисления $\overline{X}$ и S_X производятся заново без учета отброшенного результата.

Для построения гистограммы вариационный ряд разбивают на интервалы одинаковой, произвольной или специальным образом выбираемой длины. В простейшем случае берутся интервалы одинаковой длины.

Число результатов отдельных измерений в каждом интервале n_k называется частотой попадания в k–й интервал, а относительная частота $\frac{n_k}{n}$ называется частостью, где n — общее число измерений. Если отложить по оси абсцисс границы интервалов, а по оси ординат — частоты или частости, то можно построить график в виде прямоугольников, ширина которых равна длине интервала, а высота — соответствующей частоте или частости. Такой график называется гистограммой частот или гистограммой частостей соответственно. На гистограмме частот сумма всех высот прямоугольников равна n, а на гистограмме частостей — единице. Существует также гистограмма статистического распределения. Для ее построения по оси ординат откладывают значения $\frac{n_k}{n\Delta X_k}$, где ΔX_k — длина k–го интервала.

Если длины всех интервалов одинаковы ($\Delta X_k = const$), все три гистограммы совпадут при соответствующем выборе масштаба по оси ординат. Построив любую из гистограмм с интервалами одинаковой длины, можно по ее общему виду сделать предварительное заключение о возможном виде закона распределения. Это заключение будет более надежным, если на гистограмму нанести и теоретические значения частот, частостей или дифференциальной функции распределения, соединив их плавной кривой. При этом теоретические значения следует относить к серединам интервалов. Теоретические значения вычисляются в соответствии с предполагаемым законом распределения, в котором неизвестные параметры заменяются, их выборочными оценками.

В данной работе предлагается по гистограмме частостей с интервалами одинаковой длины $\Delta X_k = h$ (h — называется также шагом гистограммы) проверить предположение о нормальном законе распределения результатов отдельных измерений. Частость есть оценка вероятности попадания результата в k–й интервал. Теоретическая вероятность P_k может быть вычислена по формуле

$$P_k = P\left\{X_k < X < X_{k+1}\right\} = \Phi\left(Z_{k+1}\right) - \Phi\left(Z_k\right), \quad (11)$$

где X_k, X_{k+1} — нижняя и верхняя границы k–го интервала; $Z_k = \frac{X_k - \overline{X}}{S_X}$; $\Phi\left(Z_k\right)$ — значение интегральной функции нормированного нормального распределения для $Z = Z_k$ (табл. 1 прил.).

В заключительной части работы предлагается обработать как самостоятельные выборки 4 подмассива одинакового объема. Построение гистограмм для подмассивов теряет смысл из–за малости их объема. Вид закона распределения предлагается считать неизвестным (но с конечными математическим ожиданием и дисперсией) и для построения доверительного интервала воспользоваться неравенством Чебышева.

Для вычисления оценки СКО применить формулу

$$S_j = \frac{W_{n,j}}{d_n}, \qquad (12)$$

где $W_{n,j} = X_{\max,j} - X_{\min,j}$; j — номер подмассива; n— объем подмассива; d_n — табулированный коэффициент (табл. 5 прил.).

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Для более полного представления о случайных ошибках по основному протоколу измерений построить вариационный ряд и гистограмму частостей.

Шаг гистограммы принять равным $h \approx W_n / r$, где W_n — размах варьирования: $W_n = X_{\max} - X_{\min}$, а r — число интервалов (r=5 или 6). Для построения гистограммы данные представить в виде табл. А.

3.2. Определить по вариационному ряду медиану, используя формулу (2) или (2.1).

3.3. Вычислить точечные оценки параметров распределения по формулам (1) и (4).

3.4. Вычислить по формуле (11) теоретические значения вероятности попадания результатов отдельных измерений в k–й интервал, заполнить табл. В. Нанести на гистограмму график теоретической вероятности попадания в k–й интервал и сравнить с гистограммой. Подтвердить или отвергнуть предположение о нормальном законе распределения в соответствующем выводе.

3.5. Если распределение признано нормальным, проверить массив данных по критериям (9), (10). Исключить обнаруженные промахи и повторить обработку по пп. 3.3. и 3.5.

3.6. Построить доверительный интервал для неизвестного истинного значения $X_{ист}$, воспользовавшись выражением (7), если гипотеза о нормальности распределения не отвергнута, или неравенством Чебышева (8), если она не может быть принята (отвергается). При этом взять $P_д = 0{,}90$.

3.7. Записать результат и вывод по работе.

Таблица А

Данные для построения гистограммы

Номер инт. k	Интервал		Среднее значение в интервале	Число значений в интервале n_k (частота)	Часто сть $\frac{n_k}{n}$
	Начало	Конец			
1	$X_{\min}$	$h + X_{\min}$	$X_{\min} + h/2$	N_1	$\frac{n_1}{n}$
2	$h + X_{\min}$	$2h + X_{\min}$	$X_{\min} + 3h/2$	N_2	$\frac{n_2}{n}$
...					
r		$X_{\max}$		N_r	$\frac{n_r}{n}$

Таблица В

Данные для построения кривой торетических вероятностей

Номер грани цы инт. k	Значение границы интервала	$Z_k = \frac{X_k - \overline{X}}{S_X}$	$\Phi(Z_k)$ (табл. 1 прил.)	$P_k = \Phi(Z_{k+1}) - \Phi(Z_k)$
1				
2				
...				
r+1				

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.

4.2. Краткие теоретические сведения.

4.3. Массив экспериментальных данных (протокол измерений для полученного варианта задания).

4.4. Вариационный ряд.

4.5. Размах варьирования и шаг гистограммы. Таблица данных для построения гистограммы (табл. А).

4.6. Гистограмма (столбчатая диаграмма частостей). На гистограмме пунктиром провести плавную кривую, сглаживающую гистограмму..

4.7. Теоретическая кривая вероятности попадания результата отдельного измерения в k–й интервал (11) в виде табл. В и сплошной линии на гистограмме по значениям P_k. Сделать вывод о соответствии гистограммы и предполагаемой нормальности распределения результатов измерений.

4.8. Расчетные формулы и результаты вычислений. Значения $\overline{X}$, $\overline{X}_{Me}$, $\overline{X}_{Mo}$, S_x, $S_{\bar{x}}$.

4.9. Проверка на промахи (при нормальном законе распределения) для уровня значимости α=0,05 и вывод о наличии промахов.

4.10. Повторные вычисления $\overline{X}$, $\overline{X}_{Me}$, S_x, $S_{\bar{x}}$ после исключения промахов.

4.11. Доверительный интервал для $X_{ист}$ по выражениям (7) или (8) в зависимости от вывода о виде распределения.

Результат многократных измерений записать в виде

$$X_{ист} = \overline{X} \pm \Delta, \quad P_д = 0{,}90, \quad n = \ldots$$

Вид распределения — нормальное (не установлен).

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Освоить основные методы и приемы проверки гипотезы о виде закона распределения результатов отдельных измерений методом линеаризации интегральной эмпирической функции распределения (метод вероятностной бумаги) с помощью критерия Колмогорова и критерия согласия χ^2 на примере нормального распределения.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При обработке экспериментальных данных и определении погрешности результатов измерений, основополагающим является допущение о нормальности закона распределения ошибок измерений. Это допущение должно быть подтверждено. В работе 1 вывод о нормальности закона распределения делается по визуальному соответствию гистограммы частостей и теоретической кривой вероятности, то есть субъективно. Более объективными являются методы, использующие вероятностную бумагу и статистические критерии.

2.1. Использование вероятностной бумаги

Вероятностной называется бумага для построения графика интегральной функции распределения, у которой масштаб по оси абсцисс равномерен, а по оси ординат — неравномерен (кроме равномерного распределения) и соответствует проверяемому закону распределения. График интегральной функции распределения превращается на соответствующей вероятностной бумаге в прямую линию. Установить прямолинейность проще, чем определить соответствие (близость) двух плавных кривых.

Существуют нормальная, логарифмически нормальная и т.д. вероятностные бумаги. При отсутствии вероятностной бумаги и в случае равномерного распределения пользуются обычной миллиметровой, вычисляя значения ординат в соответствии с проверяемым законом распределения.

Для проверки гипотезы о виде закона распределения необходимо расположить результаты измерений в неубывающем порядке, то есть построить вариационный ряд измерений:

$$-\infty < X_1 \le X_2 \le .... \le X_n < \infty .$$

Получаем ($n+1$) интервал:

$$\left(-\infty, X_1\right), \left(X_1, X_2\right), ..., \left(X_{n-1}, X_n\right), \left(X_n, \infty\right).$$

Поставив в соответствие каждому значению X_i вариационного ряда в качестве оценки функции распределения $F\left(X\right)\ i/\left(n+1\right)$–ю долю эмпирической функции распределения и пользуясь таблицами предполагаемого закона распределения, находят теоретические значения аргумента, соответствующие значениям, полученным в опыте для оценки интегральной функции $F_n\left(X_i\right)$. Например, предполагая распределение нормальным при $n=7$ для X_i, для вычисленного значения $F_7\left(X_1\right)=1/8=0{,}125$ по табл. 1 приложения находим $Z_1=-1{,}150$, для $F_7\left(X_2\right)=2/8=0{,}250$ находим $Z_2=-0{,}674$ и т.д. Поскольку между Z_i и X_i существует линейная связь $Z_i=\dfrac{X_i-\overline{X}}{S_X}$ (при неизвестных μ и σ заменяем их выборочными точечными оценками), вычислять соответствующие теоретические значения $X_{теор}$ нет необходимости, так как характер графика не изменится, если по оси ординат мы отложим значения Z_1, Z_2 и так далее, а соответствующие им опытные значения X_1, X_2 и так далее отложим по оси абсцисс. Расположение точек на графике вдоль прямой линии подтверждает линейную зависимость между экспериментальными значениями измерений X_i и теоретическими Z_i, что свидетельствует о возможности принятия гипотезы о виде закона распределения.

Проведя на глаз прямую линию через точки, можно приближенно найти оценки $\overline{X}_{гр}$, $S_{X,гр}$ значений $X_{ист}$, σ. Значение абсциссы в точке пересечения ее с построенной прямой равно $\overline{X}_{гр}$. Значение $S_{X,гр}$ можно найти по углу наклона прямой. Эти оценки, как и само установление факта прямолинейности, являются приближенными. Однако близость графических оценок к вычисленным значениям $\overline{X}$ и S_X (смотри работу 1) является подтверждением правильности гипотезы о законе распределения.

2.2. Использование критерия Колмогорова

Для определения допустимых отклонений эмпирической функции распределения от теоретической существуют непараметрические (свободные от распределения) критерии Колмогорова, Смирнова и другие.

В табл. 6 прил. даны критические значения статистики Колмогорова (Колмогорова–Смирнова), определяющие максимальное расстояние по модулю между эмпирической и теоретической функциями при $\alpha=0,10$ и $\alpha=0,05$ для разных *n*.

Пользуясь табл. 6 прил. можно построить доверительную зону для теоретической функции распределения $F(X)$:

$$P\left(D_n \le D_{n,кр}\right) = P\left(\left|F_n(X_i) - F(X)\right| \le D_{n,кр}\right) = P_д,$$

тогда

$$P\left(F_n(X_i) - D_{n,кр} \le F(X) \le F_n(X_i) + D_{n,кр}\right) = P_д. \qquad (13)$$

Из табл. 6 прил. видно, что доверительная зона очень широка при малых *n* и убывает с ростом *n* довольно медленно, следовательно, для надежного установления вида закона распределения требуются выборки большого объема.

Более наглядное представление о критерии Колмогорова можно получить, построив график эмпирической функции распределения, на который наносится также теоретическая интегральная функция, соответствующая проверяемому закону распределения. При этом, как и ранее, при неизвестных μ и σ используют их выборочные точечные оценки.

Найденное по графику во всем интервале значений X_i максимальное отклонение эмпирической функции от теоретической $D_{\max}$ сравнивается с допустимым значением $D_{n,кр}$. Гипотеза отклоняется, если $D_{\max} > D_{n,кр}$.

2.3. Использование критерия согласия χ^2

При объеме выборки n>40 для проверки гипотезы о виде распределения применяют критерий согласия χ^2 (критерий Пирсона). Он применяется для группированных данных (как при построении гистограммы), когда в каждом интервале находится не менее 5 измерений. Если число измерений в интервале оказывается меньше 5, этот интервал объединяют с соседним. Критерий согласия χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - nP_k\right)^2}{nP_k} \le \chi^2_{\nu,кр}, \tag{14}$$

где n_k — число данных в k–м интервале ($k=1, 2,...,r$); P_k — теоретическая вероятность попадания случайной величины X_i в k–й интервал, равная при нормальном законе

$$P_k = \int_{X_k}^{X_{k+1}} f(x)\,dx = \Phi\left(\frac{X_{k+1} - \overline{X}}{S_x}\right) - \Phi\left(\frac{X_k - \overline{X}}{S_x}\right), \tag{15}$$

где X_k — нижняя, а X_{k+1} — верхняя границы интервала; $\Phi(Z)$ — теоретическая интегральная функция нормированного нормального распределения; n — объем выборки; r — число интервалов; $\nu=r-j-1$ — число степеней свободы; j — число параметров закона распределения, определяемых по выборке.

В случае нормального распределения $j=2$, так как по выборке оцениваются два параметра распределения — математическое ожидание и дисперсия. В случае распределения Пуассона *j=1*, так как математическое ожидание и дисперсия его равны, по выборке определяется один параметр.

Вычисленное по (14) значение χ^2 сравнивается с табличным (критическим, табл. 7 прил.) при выбранном одностороннем уровне значимости α. Если $\chi^2 \le \chi^2_{\nu,кр}$, то гипотеза о виде распределения принимается, в противном случае она отвергается и строится новая гипотеза — предполагается другой закон. Если вид закона подобрать не удается, то пользуются неравенством Чебышева для определения случайной погрешности $\overline{X}$ (построение доверительного интервала для $X_{ист}$).

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Проверка гипотезы о нормальности распределения по вероятностной бумаге

3.1.1. Экспериментальные данные представленные в виде вариационного ряда и занести в табл. С.

При совпадении значений X_i им присваиваются разные номера, как и в вариационном ряде.

3.1.2. Занести в табл. С вычисленные как $i/(n+1)$ значения эмпирической функции распределения $F_n(X_i)$.

3.1.3. По таблицам интегральной функции нормального распределения (табл. 1 прил.) найти теоретическое значение аргумента Z_i, соответствующее каждому значению эмпирической функции распределения $F_n(X_i)$. В таблице приведены теоретические значения $\Phi(Z) > 0,5$, что соответствует положительным значениям Z_i. Для нахождения отрицательных Z_i, соответствующих значениям функции $\Phi(Z) < 0,5$ необходимо воспользоваться соотношением $\Phi(-Z)=1-\Phi(Z)$.

3.1.4. Нанести на миллиметровую бумагу точки с координатами по оси абсцисс, равными X_i, а по оси ординат — Z_i. Построить график, проведя по точкам ***прямую*** линию, обращая особое внимание на средние точки (крайние значения могут быть промахами и на них внимания не обращать). По обе стороны проведенной прямой должно находится ***приблизительно*** одинаковое количество точек.

Таблица С

Данные для проверки закона распределения по вероятностной бумаге.

Номер точки i	X_i	$F_n(X_i) = \Phi(Z_i)$	Z_i
1	X_1	$1/(n+1)$	
2	X_2	$2/(n+1)$	
...			
n	X_n	$i/(n+1)$	

3.1.5. Найти по графику оценку среднего арифметического $\overline{X}_{гр}$ и СКО $S_{X,гр}$, сравнить их с соответствующими расчетными результатами (1) и (4).

3.1.6. Сделать вывод о справедливости гипотезы о нормальности закона распределения.

3.2. Проверка нормальности по критерию Колмогорова

3.2.1. По табл. 6 прил. найти и выписать критическое значение $D_{n,кр}$ для доверительной вероятности $P_д = 0{,}90$.

3.2.2. Построить график (***на миллиметровой бумаге***) эмпирической функции распределения $F_n(X_i)$ (по табл. С) в виде ступенчатой ломаной линии полагая, что функция имеет постоянную величину от измерения до измерения, а в самой измеренной точке X_i имеет рост до соответствующего расчетного значения $F_n(X_i)$.

3.2.3. Используя данные для построения кривой теоретических вероятностей (табл. В), заполнить колонки 2 и 3 табл. D. Значения функции в колонках 4 и 5 не могут быть меньше 0 и больше 1. В ячейках таблицы, где условие не выполняется ставятся прочерки.

Таблица D

Данные для проверки закона распределения по критерию Колмогорова.

Номер границы инт. k	Значение границы интервала	$\Phi(Z_k)$ (см. табл. В)	$\Phi(Z_k) - D_{n,кр}$	$\Phi(Z_k) + D_{n,кр}$
1				
2				
...				
r+1				

3.2.4. Построить график функции $\Phi(Z_k)$ (по табл. D) на том же графике, где построена эмпирическая функция $F_n(X_i)$. При этом учесть, что $\Phi(\overline{X}) = 0{,}5$.

3.2.5. Вычислить доверительную полосу $\Phi(Z_k) \pm D_{n,кр}$, заполнить колонки 4 и 5 табл. D, нанести на тот же график нижнюю (кол. 4 табл. D) и верхнюю (кол. 5 табл. D) границы доверительной полосы. При этом помнить, что значение функции вероятности не может быть меньше нуля и больше единицы.

3.2.6. Сделать вывод о справедливости гипотезы о нормальности закона распределения.

3.3. Проверка нормальности с помощью критерия согласия χ^2

Воспользовавшись табл. А, составить табл. Е (колонки 1 — 5).

Таблица Е

Данные для проверки закона распределения по критерию согласия Пирсона

Ном. Интер-вала k	Интервал		Число знач. в интервале n_k (см. табл. А)	Теорети-ческая вероят-ность P_k (см. табл. В)	nP_k	$\frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}$
	Начало	Конец				
1	$X_{\min}$	$h+X_{\min}$	n_1	P_1	nP_1	$\frac{(n_1 - nP_1)^2}{nP_1}$
2	$h+X_{\min}$	$2h+X_{\min}$	n_2	P_2	nP_2	$\frac{(n_2 - nP_2)^2}{nP_2}$
...						
r						

3.3.2. Вычислить для каждого интервала значения $\frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}$, занести в табл. Е.

3.3.3. Вычислить χ^2 по формуле (14).

3.3.4. По табл. 7 прил. найти критическое значение $\chi^2_{\nu,кр}$ для одностороннего уровня значимости α=0,10 и ν=r-3. Сравнить вычисленное значение χ^2 с табличным.

3.3.5. Сделать вывод о справедливости гипотезы о нормальности закона распределения.

3.3.6. Сравнить выводы по всем трем методам. В случае противоречивых выводов объяснить причины. Сделать общий вывод о законе распределения

3.3.7. Составить отчет

4. Содержание отчета

4.1. Наименование и цель работы.

4.2. Краткие теоретические сведения.

4.3. Таблица C.

4.4. График $Z_i = f(X_i)$ на миллиметровой бумаге.

4.5. Значения $\overline{X}_{гр}$ и $S_{X,гр}$, сравнение с вычисленными значениями (1) и (4).

4.6. Вывод о законе распределения.

4.7. Таблица D.

4.8. Значение $D_{n,кр}$ по табл. 6 прил.

4.9. График $F_n(X_i)$ и $\Phi(Z_k)$, доверительная полоса $\Phi(Z_k) - D_{n,кр}$ и $\Phi(Z_k) + D_{n,кр}$

4.10. Вывод о законе распределения.

4.11. Таблица E.

4.12. Сравнение вычисленного значения χ^2 с табличным $\chi^2_{\nu,кр}$ по табл. 7 прил.

4.13. Вывод о законе распределения.

4.14. Сравнение выводов по пп. 4.6, 4.10 и 4.13.. Объяснение причин противоречий, общий вывод о законе распределения.

ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- Изучить основные особенности объединения результатов разных серий измерений в общий массив.
- Приобрести практические навыки обработки экспериментальных данных, полученных в нескольких сериях измерений при отсутствии систематических ошибок и нормальном законе распределения случайных ошибок измерений.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Измерительную информацию о физической величине постоянного (одного и того же) размера часто получают в разное время, в разных условиях, разными методами, разные операторы. Если объединить все результаты измерений в общий массив, то можно получить более точный и надежный результат за счет увеличения объема выборки. Однако объединение возможно только при условии однородности серий.

В математической статистике однородными называются выборки (серии), взятые из одной генеральной совокупности, то есть имеющие одинаковый вид закона распределения, одинаковые математические ожидания и одинаковые дисперсии. В метрологии серии называются однородными, если подчиняются закону распределения одного вида с одинаковыми математическими ожиданиями (дисперсии могут быть различными).

Если дисперсии в сериях одинаковы (не выборочные их оценки, а сами дисперсии), то в простейшем случае для двух серий измерений критерий однородности (*t*–критерий) имеет вид

$$t = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{S^2_{X,об}\left(1/n_1 + 1/n_2\right)}} \le t_{\alpha/2,\nu_{об}}, \qquad (16)$$

где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — средние арифметические в сериях; n_1 и n_2 — объемы серий; $t_{\alpha/2,\nu_{об}}$ — табличное значение t–статистики (табл. 3 прил.); $S^2_{X,об}$ — объединенная оценка дисперсии σ^2:

$$S^2_{X,об} = \frac{(n_1-1)^2 S^2_{X,1} + (n_2-1)^2 S^2_{X,2}}{\nu_{об}}, \qquad (17)$$

где $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$ — выборочные оценки дисперсии в сериях; $\nu_{об} = n_1 + n_2 - 2$ — число степеней свободы оценки $S^2_{X,об}$ и табличного значения $t_{\alpha/2,\nu_{об}}$.

Прежде чем воспользоваться критерием (16), необходимо убедиться, что $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$ есть оценки одной и той же дисперсии σ^2. Только в этом случае может быть использована объединенная оценка дисперсии $S^2_{X,об}$ в виде (17). Проверка гипотезы о равенстве дисперсий в сериях осуществляется с помощью F–критерия (критерия дисперсионного отношения).

$$F = \frac{S^2_{X,\max}}{S^2_{X,\min}} \le F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}, \qquad (18)$$

где $S^2_{X,\max}$ — максимальная из двух оценок $S^2_{X,1}$ и $S^2_{X,2}$, ν_1 — число степеней свободы числителя ($\nu = n - 1$); $S^2_{X,\min}$ — минимальная из двух оценок, ν_2 — число степеней свободы знаменателя. Значение F_{α,ν_1,ν_2} берется из таблиц F–распределения (табл. 8 прил.) при одностороннем уровне значимости α и числах степеней свободы числителя ν_1 и знаменателя ν_2.

Если условие (18) выполняется, гипотеза о равенстве дисперсий принимается на уровне значимости α. В противном случае она отвергается.

Если условия (18) и (16) выполняются, делается вывод об равноточности и однородности серий. В этом случае все экспериментальные данные объединяются и обрабатываются как единый массив.

Поскольку для серий оценки $\overline{X}_j$ и $S_{X,j}$ обычно бывают уже вычислены, то удобнее пользоваться другими формулами. Для двух серий они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{N} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(n_j \overline{X}_j\right)}{N} \\ S_{\overline{X}} &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{2}\left(n_j - 1\right) S_{X,j}^2 + \sum\limits_{j=1}^{2} n_j \left(\overline{X}_j - \overline{X}\right)^2}{N\left(N-1\right)}} \end{aligned}\right\}, \qquad (19)$$

где $N = \sum\limits_{j=1}^{2} n_j$ — общее число данных объединенного массива.

Критериями (16) и (18) можно пользоваться и тогда, когда число серий больше двух, но n_j в сериях приблизительно одинаковы. Если серии с максимально различающимися $\overline{X}_j$ и $S_{X,j}$ не будут отвергнуты критериями, тогда и остальные серии принимаются к объединению.

Если будет обнаружена неравноточность серий (условие (18) не выполнено), то гипотезу о равенстве математических ожиданий можно проверить по приближенному критерию:

$$t = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{\sqrt{S_{X,1}^2 / n_1 + S_{X,2}^2 / n_2}} \le t_{\alpha/2,\nu^*}, \qquad (20)$$

где
$$\nu^* = \frac{\left(S_{X,1}^2 / n_1 + S_{X,2}^2 / n_2\right)^2}{\dfrac{\left(S_{X,1}^2 / n_1\right)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{\left(S_{X,2}^2 / n_2\right)^2}{n_2 + 1}} - 2 \,. \qquad (21)$$

Статистика t в (20) подчиняется распределению Беренса–Фишера, пользование которым весьма затруднительно из–за отсутствия нужных таблиц и сложности процедуры пользования имеющимися. Приближенное выражение (21) позволяет пользоваться таблицами t–распределения (табл. 3 прил.).

Если обнаружена неравноточность измерений в сериях, но серии однородны по условию (20), при совместной их обработке неравноточность учитывается при расчете среднего арифметического введением весов P_j, а вычисления выполняются по формулам (22).

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= \sum_{j=1}^{L}\left(P_j \overline{X}_j\right) \\ P_j &= \frac{n_j / S_{X,j}^2}{\sum_{j=1}^{L}\left(n_j / S_{X,j}^2\right)} \\ S_{\overline{X}} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{L}\left(n_i / S_{X,j}^2\right)}} \end{aligned}\right\}, \qquad (22)$$

где L — число серий.

При построении t–интервала для истинного значения в случае объединения равноточных серий берут число степеней свободы $\nu=N-1$.

При объединении неравноточных серий для построения доверительного интервала в метрологии обычно пользуются неравенством Чебышева.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

3.1. Взять дополнительный протокол результатов измерений согласно варианту задания и рассчитать для него оценки параметров распределения (1) и (3).

3.2. Проверить ***равноточность*** измерений в сериях (для основного и дополнительного протоколов) по F–критерию (18) при уровне значимости $\alpha=0,05$.

3.3. При ***равноточности*** серий вычислить $S^2_{X,об}$ (17) и проверить на однородность серии по t-критерию (16). ***При неравноточности*** однородность проверять по t -критерию (20).

3.4. Объединить результаты ***однородных*** и ***равноточных*** серий по формулам (19). Для ***однородных*** и ***неравноточных*** серий вычисления $\overline{X}$ и $S_{\overline{X}}$ производить по формулам (22). При ***неоднородности*** серий делается вывод о невозможности объединения результатов измерений в общий массив вне зависимости от ***равноточности*** выполненных измерений.

3.5. Вычислить доверительный интервал (7) используя объединенные оценки для однородных серий и сравнить с результатами для основной серии.

3.6. Сделать вывод по работе.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

4.1. Название и цель работы.
4.2. Краткие теоретические сведения.
4.3. Протоколы измерений по сериям.
4.4. Расчетные формулы и результаты вычислений.
4.5. Выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология: Учебник для вузов. М.: Стандарт, 1991. С. 24, 25, 79 — 90, 102.

2. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1972. С. 123 — 150, 153 — 156, 161 — 163.

3. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшева Т.Ф. Качество измерений. Л.: Лениздат, 1987. С. 197 — 215.

4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. С. 9 — 13, 23 — 27, 58 — 60.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ;\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\ ;\ \Phi(-Z)=1-\Phi(Z)$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	0,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	0,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	0,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	0,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	0,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	0,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	0,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	0,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	0,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	0,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	0,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015

Окончание табл. 1

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,3	0,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9161	,9147	,9162	,9177
1,4	0,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	0,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	0,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	0,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	0,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	0,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	0,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	0,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	0,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	0,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	0,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	0,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	0,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	0,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	0,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9980	,9980	,9981
2,9	0,9981	,9982	,9983	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,0	0,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990

Таблица 2

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения (плотность распределения)

$$f\left(Z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}};\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma};\ f\left(-Z\right)=f\left(Z\right)$$

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	,3989	,3989	,3987	,3986	,3984	,3982	,3980	,3977	,3973
0,1	0,3970	,3965	,3961	,3956	,3951	,3945	,3939	,3932	,3925	,3918
0,2	0,3910	,3902	,3894	,3885	,3876	,3867	,3857	,3847	,3836	,3825
0,3	0,3814	,3802	,3790	,3778	,3765	,3752	,3739	,3726	,3712	,3697
0,4	0,3683	,3662	,3653	,3637	,3621	,3605	,3589	,3572	,3555	,3538
0,5	0,3521	,3503	,3485	,3467	,3448	,3429	,3410	,3391	,3372	,3352
0,6	0,3332	,3312	,3292	,3271	,3251	,3230	,3209	,3187	,3166	,3144
0,7	0,3123	,3101	,3079	,3056	,3034	,3011	,2989	,2966	,2943	,2920
0,8	0,2897	,2874	,2850	,2827	,2803	,2780	,2756	,2732	,2709	,2685
0,9	0,2661	,2637	,2613	,2589	,2565	,2541	,2516	,2492	,2468	,2444
1,0	0,2420	,2396	,2371	,2347	,2323	,2299	,2275	,2251	,2227	,2203
1,1	0,2179	,2155	,2131	,2107	,2083	,2059	,2036	,2012	,1989	,1965
1,2	0,1942	,1919	,1895	,1872	,1849	,1826	,1804	,1781	,1758	,1736
1,3	0,1714	,1691	,1669	,1647	,1626	,1604	,1582	,1561	,1539	,1518
1,4	0,1497	,1476	,1456	,1435	,1415	,1394	,1374	,1354	,1334	,1315
1,5	0,1295	,1276	,1257	,1238	,1219	,1200	,1182	,1163	,1145	,1127
1,6	0,1109	,1092	,1074	,1057	,1040	,1023	,1006	,0989	,0973	,0957
1,7	0,0940	,0925	,0909	,0893	,0878	,0863	,0848	,0833	,0818	,0804

Окончание табл. 2

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,8	0,0790	,0775	,0761	,0748	,0734	,0721	,0707	,0694	,0681	,0669
1,9	0,0656	,0644	,0632	,0620	,0608	,0596	,0584	,0573	,0562	,0551
2,0	0,0540	,0529	,0519	,0508	,0498	,0488	,0478	,0468	,0459	,0449
2,1	0,0440	,0431	,0422	,0413	,0404	,0396	,0387	,0379	,0371	,0363
2,2	0,0355	,0347	,0339	,0332	,0325	,0317	,0310	,0303	,0297	,0290
2,3	0,0283	,0277	,0270	,0264	,0258	,0252	,0246	,0241	,0235	,0229
2,4	0,0224	,0219	,0213	,0208	,0203	,0198	,0194	,0189	,0184	,0180
2,5	0,0175	,0171	,0167	,0163	,0158	,0154	,0151	,0147	,0143	,0139
2,6	0,0136	,0132	,0129	,0126	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110	,0107
2,7	0,0104	,0101	,0099	,0096	,0093	,0091	,0088	,0086	,0084	,0081
2,8	0,0079	,0077	,0075	,0073	,0071	,0069	,0067	,0065	,0063	,0061
2,9	0,0060	,0058	,0056	,0055	,0053	,0051	,0050	,0048	,0047	,0046
3,0	0,0044	,0043	,0042	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036	,0035	,0034

Таблица 3

Коэффициенты Стьюдента

Число степеней свободы $\nu = n - 1$	Доверительная вероятность P_{∂}	
	0,9	0,95
1	6,31	12,71
2	2,92	4,30
3	2,35	3,18
4	2,13	2,78

Окончание табл. 3

5	2,02	2,57
6	1,94	2,45
7	1,90	2,37
8	1,86	2,31
9	1,83	2,26
10	1,81	2,23
12	1,78	2,18
15	1,75	2,13
17	1,74	2,11
18	1,73	2,10
19	1,73	2,09
20	1,72	2,09
25	1,71	2,06
30	1,70	2,04
40	1,68	2,02
∞	1,64485	1,95996

Таблица 4

Критические значения статистики ν для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$

n	4	6	8	10	15	20	30	35	40
ν	1,689	1,996	2,172	2,294	2,493	2,623	2,792	2,853	2,904

Таблица 5

Коэффициенты d_n для определения оценки среднего квадратического отклонения S_x по размаху выборки W_n

$W_n = X_{\max} - X_{\min}$; n — количество измерений; $S_x = \dfrac{W_n}{d_n}$

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
d_n	2,06	2,53	2,85	3,08	3,26	3,41	3,53	3,64	3,74

Таблица 6

Критические значения для наибольшего отклонения эмпирической функции распределения от теоретической (критерий Колмогорова). Значения $D_{n,\alpha}$, удовлетворяющие условию $P\{D_n \geq D_{n,\alpha}\} = \alpha$

n / α	4	6	8	10	15	20	25	30	40
0,05	0,62	0,52	0,45	0,41	0,34	0,29	0,26	0,24	0,21
0,10	0,57	0,47	0,41	0,37	0,30	0,26	0,24	0,22	0,19

Для $n \geq 35$ используют аппроксимации:

$$\alpha = 0{,}05,\ \ D_{n,\alpha} \approx \frac{1{,}36}{\sqrt{n}},$$

$$\alpha = 0{,}10,\ \ D_{n,\alpha} \approx \frac{1{,}22}{\sqrt{n}}.$$

Таблица 7

Распределение χ^2 (процентные точки). Значения $\chi^2_{\alpha,\nu}$, удовлетворяющие условию $P\left\{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,\nu}\right\} = \alpha$ или эквивалентному условию $P\left\{\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\nu}\right\} = 1 - \alpha = P_д$

$P_д$ / ν	0,025	0,05	0,40	0,50	0,60	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,275	0,455	0,708	3,841	5,024
2	0,051	0,103	1,022	1,386	1,833	5,991	7,378
3	0,216	0,352	1,869	2,366	2,946	7,815	9,348
4	0,484	0,711	2,753	3,357	4,045	9,488	11,143
5	0,831	1,145	3,655	4,351	5,132	11,070	12,832
6	1,237	1,635	4,570	5,348	6,211	12,592	14,449
7	1,690	2,167	5,493	6,346	7,283	14,067	16,013
8	2,180	2,733	6,423	7,344	7,351	15,507	17,535
9	2,700	3,325	7,357	8,343	9,414	16,919	19,023
10	3,247	3,940	8,295	9,342	10,473	18,307	20,483
12	4,404	5,226	10,182	11,340	12,584	21,026	23,336
14	5,629	6,571	12,079	13,339	14,685	23,685	26,119
16	6,908	7,962	13,983	15,338	16,780	26,296	28,845
18	8,231	9,390	15,893	17,338	18,868	28,861	31,526
20	9,591	10,851	17,809	19,337	20,951	31,410	34,170
25	13,120	14,611	22,616	24,337	26,143	37,652	40,646
30	16,791	18,493	27,442	29,336	31,316	43,773	46,979
40	24,433	26,509	37,134	37,335	41,622	55,758	59,345
α	0,975	0,95	0,60	0,50	0,40	0,05	0,025

Примечание: для построения двухстороннего доверительного интервала для случайной величины, имеющей χ^2-распределение, удовлетворяющего условию $P\left\{\chi^2_{1-\alpha^*/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\right\} = P^*_\partial$, следует учесть, что

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha^*/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\right\} = P\left\{\chi^2 < \chi^2_{\alpha^*/2}\right\} - P\left\{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha^*/2}\right\} =$$
$$= 1 - \alpha^*/2 - \left[1 - \left(1 - \alpha^*/2\right)\right] = 1 - \alpha^* = P^*_\partial .$$

Верхнюю границу такого интервала находят по табл. для $\alpha = \alpha^*/2$, а нижнюю — для $\alpha = 1 - \alpha^*/2$.

Таблица 8

Значения $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$ для $\alpha = 0{,}05$ (верхние 5-процентные критические значения, односторонний критерий)

ν_1 / ν_2	1	5	8	10	15	20	30	40	60	120
5	6,61	5,05	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	4,39	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70
8	5,59	3,69	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97
10	4,96	3,33	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58
15	4,54	2,9	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,20	2,16	2,11
20	4,35	2,71	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90
30	4,17	2,53	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	2,45	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	2,37	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	2,29	2,02	1,91	1,75	1,66	1,55	1,50	1,43	1,35

№ 1

6,68	7,63	7,69	9,52
6,77	7,35	4,88	7,58
7,35	7,27	9,64	6,29
7,57	7,25	8,64	8,36
8,81	9,57	6,38	6,97
8,87	6,58	9,08	8,54
8,79	9,51	7,68	9,7
9,84	7,64	8,3	8,84

№ 2

5,36	7,26	7,38	11,04
5,54	6,7	1,76	7,16
6,7	6,54	11,28	4,58
7,14	6,5	9,28	8,72
9,62	11,14	4,76	5,94
9,74	5,16	10,16	9,08
10,79	11,02	7,36	11,4
11,68	7,28	8,6	9,68

№ 3

7,34	7,81	7,84	8,76
7,38	7,67	6,44	7,79
7,67	7,63	8,82	7,14
7,78	7,62	8,32	8,18
8,4	8,78	7,19	7,48
8,43	7,29	8,54	8,27
8,39	8,75	7,84	8,85
8,92	7,82	8,15	8,42

№ 4

7,74	7,93	7,94	8,3
7,75	7,87	7,38	7,92
7,87	7,85	8,33	7,66
7,91	7,85	8,13	8,08
8,16	8,31	7,68	7,79
8,17	7,72	8,22	8,11
8,16	8,3	7,94	8,34
8,37	7,93	8,06	8,17

№ 5

7,87	7,96	7,97	8,15
7,88	7,93	7,69	7,96
7,93	7,93	8,16	7,83
7,96	7,92	8,06	8,04
8,08	8,16	7,84	7,9
8,09	7,86	8,11	8,05
8,08	8,15	7,97	8,17
8,18	7,96	8,03	8,08

№ 6

78,68	79,63	79,69	81,52
78,77	79,35	76,88	79,58
79,35	79,27	81,64	78,29
79,57	79,25	80,64	80,36
80,81	81,57	78,38	78,97
80,87	78,58	81,08	80,54
80,79	81,51	79,68	81,7
81,84	79,64	80,3	80,84

№ 7

10,03	10,39	8,59	10,66
10,23	11,81	9,5	9,46
9,26	10,06	9,54	12,5
8,79	9,51	10,83	9,56
9,51	8,81	11,42	9,65
9,81	9,24	7,6	10,37
10,57	8,46	9,42	11,33
9,49	10,99	9,29	9,3

№ 8

10,06	10,78	7,18	11,32
10,46	13,62	9	8,92
8,52	10,12	9,08	15
7,58	9,02	11,66	9,12
9,02	7,62	12,84	9,3
9,78	8,48	5,2	10,74
11,14	6,92	8,84	12,66
8,98	11,98	8,58	8,6

№ 9

10,01	10,19	7,29	10,33
10,11	10,9	9,75	9,73
9,63	10,03	9,77	11,25
9,39	9,75	10,41	9,78
9,75	9,4	10,71	9,82
9,94	9,62	8,8	10,18
10,28	9,23	9,71	10,66
9,74	10,49	9,64	9,65

№ 10

10,01	10,09	9,72	10,13
10,05	10,36	9,9	9,89
9,85	10,01	9,91	10,5
9,76	9,9	10,17	9,91
9,9	9,76	10,28	9,93
9,98	9,85	9,52	10,07
10,11	9,69	9,88	10,27
9,9	10,2	9,86	9,86

№ 11

10	10,04	9,86	10,07
10,02	10,18	9,95	9,95
9,93	10,01	9,95	10,25
9,88	9,95	10,08	9,96
9,95	9,88	10,14	9,96
9,99	9,92	9,76	10,04
10,06	9,85	9,94	10,13
9,95	10,1	9,93	9,93

№ 12

100,03	100,39	98,59	100,66
100,23	101,81	99,5	99,46
99,26	100,06	99,54	102,5
98,79	99,51	100,83	99,56
99,51	98,81	101,42	99,65
99,89	99,24	97,6	100,37
100,57	98,46	99,42	101,33
99,49	100,99	99,29	99,3

№ 13

4,81	5,82	4,93	5,55
3,95	5,79	6,67	4,32
3,64	4,81	6,2	4,93
6,49	3,95	5,55	5,81
5,19	3,8	4,14	6,08
5,81	4,85	3,37	4,06
3,24	5,5	3,81	4,15
6,42	5,87	3,51	4,36

№ 14

4,62	6,64	4,86	6,1
2,9	6,58	8,34	3,64
2,28	4,62	7,4	4,86
7,98	2,9	6,1	6,62
5,38	2,6	3,28	7,16
6,62	4,7	1,74	3,12
1,48	6	2,62	3,3
7,84	6,74	2,02	3,72

№ 15

4,91	5,41	4,96	5,27
4,47	5,39	5,83	4,66
4,32	4,9	5,6	4,96
5,74	4,47	5,27	5,4
5,09	4,4	4,57	5,54
5,4	4,92	4,18	4,53
4,12	6,25	4,4	4,57
5,71	5,43	4,25	4,68

№ 16

4,96	5,16	4,99	5,11
4,79	5,16	5,33	4,86
4,73	4,96	5,24	4,99
5,3	4,79	5,11	5,16
5,04	4,76	4,83	5,22
5,16	4,97	4,67	4,81
4,65	5,1	4,76	4,83
5,28	5,17	4,7	4,87

№ 17

4,98	5,08	4,99	5,05
4,89	5,08	5,17	4,93
4,86	4,98	5,12	4,99
5,15	4,89	5,05	5,08
5,02	4,88	4,91	5,11
5,08	4,98	4,84	4,91
4,82	5,05	4,88	4,91
5,14	5,09	4,85	4,94

№ 18

49,81	50,82	49,93	50,55
48,95	50,79	51,67	49,32
48,64	49,81	51,2	49,93
51,49	48,95	50,55	50,81
50,19	48,8	49,14	51,08
50,81	49,85	48,37	49,06
48,24	50,5	48,81	49,15
51,42	50,87	48,51	49,36

№ 19

9,75	9,47	10,34	10,19
9,61	10,5	9,65	10,51
8,96	8,82	9,22	10,76
10,98	10,52	9,18	9,15
10,51	9,57	11,42	10,55
9,8	9,09	9,99	11,54
10,87	9,01	9,61	10,9
11,04	11,3	10,72	9,1

№ 20

9,5	8,94	10,68	10,38
9,22	11	9,3	11,02
7,92	7,64	8,44	11,52
11,96	11,04	8,36	8,3
11,02	9,14	12,84	11,1
9,6	8,18	9,98	13,08
11,74	8,02	9,22	11,8
12,08	12,6	11,44	8,2

№ 21

8,11	9,06	9,12	10,95
8,2	8,78	6,31	9,01
8,78	8,7	11,07	7,72
9	8,68	10,07	9,79
10,24	11	7,81	8,4
10,3	8,01	10,51	9,97
10,22	10,94	9,11	11,13
11,27	9,07	9,73	10,27

№ 22

12,6	12,96	11,16	13,23
12,8	14,38	12,07	12,03
11,83	12,63	12,11	15,07
11,36	12,08	13,4	12,13
12,08	11,38	13,99	12,22
12,38	11,81	10,17	12,94
13,14	11,03	11,99	13,9
12,06	13,56	11,86	11,87

№ 23

12,63	13,35	9,75	13,89
13,03	16,19	11,57	11,49
11,09	12,69	11,65	17,57
10,15	11,59	14,23	11,69
11,59	10,19	15,41	11,87
12,35	11,05	7,77	13,31
13,71	9,49	11,41	15,23
11,55	14,55	11,15	11,17

№ 24

8,59	8,67	8,3	8,71
8,63	8,94	8,48	8,47
8,43	8,59	8,49	9,08
8,34	8,48	8,75	8,49
8,48	8,34	8,86	8,51
8,56	8,43	8,1	8,65
8,69	8,27	8,46	8,85
8,48	8,78	8,44	8,44

№ 25

8,58	8,62	8,44	8,65
8,6	8,76	8,53	8,53
8,51	8,59	8,53	8,83
8,46	8,53	8,66	8,54
8,53	8,46	8,72	8,54
8,57	8,5	8,34	8,62
8,64	8,43	8,52	8,71
8,53	8,68	8,51	8,51

№ 26

4,81	5,82	4,93	5,55
3,95	5,79	6,67	4,32
3,64	4,81	6,2	4,93
6,49	3,95	5,55	5,81
5,19	3,8	4,14	6,08
5,81	4,85	3,37	4,06
3,24	5,5	3,81	4,15
6,42	5,87	3,51	4,36

№ 27

4,91	5,41	4,96	5,27
4,47	5,39	5,83	4,66
4,32	4,9	5,6	4,96
5,74	4,47	5,27	5,4
5,09	4,4	4,57	5,54
5,4	4,92	4,18	4,53
4,12	6,25	4,4	4,57
5,71	5,43	4,25	4,68

№ 28

6,39	6,59	6,42	6,54
6,22	6,59	6,76	6,29
6,16	6,39	6,67	6,42
6,73	6,22	6,54	6,59
6,47	6,19	6,26	6,65
6,59	6,4	6,1	6,24
6,08	6,53	6,19	6,26
6,71	6,6	6,13	6,3

№ 29

12,32	12,04	12,91	12,76
12,18	13,07	12,22	13,08
11,53	11,39	11,79	13,33
13,55	13,09	11,75	11,72
13,08	12,14	13,99	13,12
12,37	11,66	12,56	14,11
13,44	11,58	12,18	13,47
13,61	13,87	13,29	11,67

№ 30

12,07	11,51	13,25	12,95
11,79	13,57	11,87	13,59
10,49	10,21	11,01	14,09
14,53	13,61	10,93	10,87
13,59	11,71	15,41	13,67
12,17	10,75	12,55	15,65
14,31	10,59	11,79	14,37
14,65	15,17	14,01	10,77

Варианты контрольных работ

(Вариант выдается ПРЕПОДАВАТЕЛЕМ !)

№ варианта	№ **основного** протокола измерений	№ **дополнительного** протокола измерений
1.	1	16
2.	2	7
3.	3	9
4.	4	10
5.	5	11
6.	6	12
7.	7	19
8.	8	20
9.	9	10
10.	10	11
11.	11	19
12.	12	18
13.	13	15
14.	14	16
15.	15	17
16.	16	13
17.	17	2
18.	18	6
19.	19	2
20.	20	22
21.	4	5
22.	21	28
23.	22	29
24.	26	27
25.	23	30
26.	24	25
27.	25	2

№ варианта	№ **основного** протокола измерений	№ **дополнительного** протокола измерений
28.	27	13
29.	28	3
30.	29	30
31.	30	23
32.	26	17
33.	16	27
34.	15	14
35.	8	10

Юрий Романович Чашкин
Андрей Владимирович Щекин

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Главный редактор Л. А.Суевалова
Редактор Е. Н. Ярулина
Компьютерная верстка А. В. Щекина

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 020526 от 23.04.97

Подписано в печать . Формат 60 × 84 1/16.
Бумага писчая. Гарнитура „Таймс”. Печать офсетная. Усл. печ. л. .
Уч.-изд. л. . Тираж 150 экз. Заказ . С

Издательство Тихоокеанского государственного университета. 680035, Хабаровск, Тихоокеанская, 136.

Печатный участок издательства Тихоокеанского государственного университета. 680035, Хабаровск, Тихоокеанская, 136.